Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Introdução à Topologia

Autor: *Fabio Augusto Camargo*

Orientador: *Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso A

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Sadao Massago
Karina Schiabel Silva
Vera Lúcia Carbone

São Carlos, 31 de julho de 2013.

Introdução à Topologia

Autor: *Fabio Augusto Camargo*

Orientador: *Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso A

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Sadao Massago
Karina Schiabel Silva
Vera Lúcia Carbone

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 31 de julho de 2013.

Fabio Augusto Camargo (aluno)

Márcio de Jesus Soares (orientador)

Resumo

Topologia geral é a base de conhecimento em várias áreas da Matemática. Neste trabalho serão desenvolvidos temas básicos, como: espaços topológicos; base para uma topologia; subespaço topológico; e topologia quociente.

Sumário

Prefácio

O estudo realizado durante esse trabalho é sobre introdução à topologia, com o intuito de ter uma melhor base de conhecimento para a realização do TCC B, que será sobre caracterização das superfícies compactas. O estudo envolve os conceitos básicos da topologia e exemplos significativos para um bom entendimento do conteúdo. A minha curiosidade por superfícies é o que motivou-me a dar continuidade no assunto para o TCC B.

Capítulo 1

Espaços Topológicos

O conceito de espaço topológico nasceu do estudo da reta real, espaço euclidiano e funções contínuas aplicadas sobre esses espaços. Definiremos espaço topológico e estudaremos algumas formas de se construir uma topologia sobre um conjunto.

Definição 1. *Dizemos que uma topologia sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X tendo as seguintes propriedades:*

- *$\emptyset$ e X estão na coleção τ*
- *A união de elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ*
- *A interseção finita de elementos de qualquer subcoleção de τ esta em τ*

O conjunto X nessas condições é chamado de Espaço Topológico. Podemos, de outra forma, representar com um par ordenado (X, τ) sendo um conjunto X e a topologia τ nele.

Dado um conjunto X e uma topologia τ sobre X, dizemos que todo $U \in \tau$ é um aberto de X.

Tendo isso em mente, podemos dizer também que um espaço topológico é um conjunto X junto a uma coleção de abertos de X, onde $\emptyset$ e X são abertos, qualquer união de abertos é aberto, e intersecções finitas de abertos são abertos.

Exemplo 1.1. *Seja X um conjunto de quatro elementos. $X = \{a, b, c, d\}$, existem várias possíveis topologias no conjunto X.*

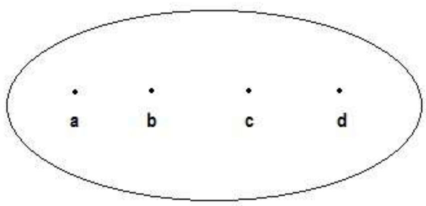

Figura 1.1: $\tau = \{\emptyset, X\}$.

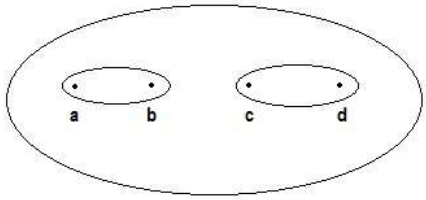

Figura 1.2: $\tau = \big\{\emptyset,\, \{a, b\},\, \{c, d\}, X\big\}$.

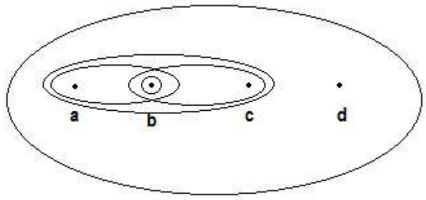

Figura 1.3: $\tau = \big\{\emptyset,\{a, b\},\, \{b, c\},\{b\},\{a, b, c\}\big\}$.

Porém existem casos que algumas coleções não são topologias em X.

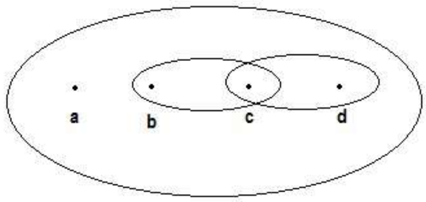

Figura 1.4: Não é uma topologia, pois $\{c\} \notin \tau$, em que $\{c\} = \{b, c\} \cap \{c, d\}$.

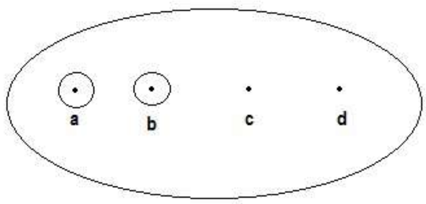

Figura 1.5: Não é uma topologia, pois $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau$.

Dentre todas as topologias que se pode colocar sobre um conjunto qualquer X, existem algumas mais comuns e significativas para esse estudo.

Exemplo 1.2 (Topologia Discreta)**.** *Chamamos de Topologia Discreta, a topologia em que todos subconjuntos de* X *são abertos, ou seja, todo subconjunto* $U \subset X$ *temos* $U \in \tau$*.*

Exemplo 1.3 (Topologia Caótica)**.** *Chamamos de Topologia Caótica, a topologia em que somente* $\emptyset$ *e o próprio* X *são abertos (estão em* τ*) Veja Figura 1.1.*

Exemplo 1.4 (Topologia do Complemento Finito)**.** *Chamamos de Topologia do Complemento Finito, a topologia em que todos subconjuntos* $U \subset X$ *tais que,* $X \setminus U$ *ou é vazio ou é finito.*

Há também a possibilidade de compararmos duas topologias sobre um mesmo conjunto X. Dizemos que τ' é mais fina que τ, se τ e τ' são duas topologias sobre X, e $\tau' \supset \tau$. A grosso modo, comparamos dizendo que uma tem mais abertos que a outra.

1.1 Bases para uma Topologia

Como vimos podem existir várias topologias sobre um conjunto. Notamos que é necessário descrever toda a coleção de abertos. Podemos descrever uma coleção de abertos a partir de um coleção menor de abertos, o que iremos chamar de base para uma topologia.

Definição 2. *Dado um conjunto* X*, chamamos de base para uma topologia* τ *sobre* X*, uma coleção* β *de subconjuntos de* X *(onde esses subconjuntos são chamados de "elementos básicos") tais que:*

I) Para todo $x \in X$*, existe pelo menos um elemento básico que o contém.*

II) Se $x \in B_1 \cap B_2$*, onde* $B_1 \in \beta$ *e* $B_2 \in \beta$*, então existe* $B_3 \in \beta$*, com* $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ *tal que* $x \in B_3$

Da definição, dizemos que τ é uma topologia gerada por essa base β. Um subconjunto $U \subset X$ é aberto em X se para todo $x \in U$, existir $B_1 \in \beta$ tal que $x \in B_1$ e $B_1 \subset U$.

Teorema 3 (Base)**.** *Seja* X *um conjunto, e seja* β *uma base para a topologia* τ *em* X*. Então* τ *é igual a coleção de todas as uniões de elementos básicos de* β

Demonstração. Seja $U \in \tau$, temos que para todo $x \in U$ existe $B_x \subset \beta$ tal que $x \in B_x$ e $B_x \subset U$. Temos que $U = \cup_{x \in U} B_x$. Logo U é uma união de elementos básicos de β. □

Sejam duas topologias τ e τ' geradas pelas bases β e β' respectivamente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(I) Para cada $x \in X$, e cada elemento básico $B_x \in \beta$ contendo x, existe $B'_x \in \beta'$ tal que $x \in B'_x \subset B_x$;

(II) τ' é mais "fina" que τ.

Exemplo 1.5. *Se* β *é uma coleção de todos os intervalos abertos na reta real,* $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ *, então a topologia gerada por essa base é chamada de topologia usual da reta.*

Definição 4 (Sub-base)**.** *Uma sub-base* $\mathcal{S}$ *para uma topologia em* X *é uma coleção de subconjuntos de* X *cuja união é todo o* X*. A topologia gerada pela sub-base* $\mathcal{S}$ *é definida pela coleção* τ *de todas as uniões de finitas intersecções de elementos de* $\mathcal{S}$

1.2 Topologia da Ordem

Se X um conjunto simplesmente ordenado, existe uma topologia natural sobre X, definida pela relação de ordem e chamada Topologia da ordem. Suponhamos que o conjunto X tenha somente uma relação de ordem simples $<$. Dado dois elementos a e b de X, em que $a < b$, então existem quatro tipos de subconjuntos de X, chamados de intervalos, determinados por a e b:

- $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ são chamados intervalos abertos;
- $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ são chamados intervalos fechados;
- $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ são chamados intervalos meio abertos;
- $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ são chamados intervalos meio abertos.

Defini-se uma topologia sobre um conjunto X com uma simples relação de ordem, considerando β uma coleção de todos os conjuntos dos tipos:

(I) Todos os intervalos abertos (a, b) em X;

(II) Todos intervalos da forma $[a_0, b)$ em X, onde a_0 é o menor elemento de X, se existir.

(III) Todos intervalos da forma $(a, b_0]$, onde b_0 é o maior elemento de X, se existir.

Temos que a coleção β é uma base para uma topologia em X, chamada *Topologia da Ordem.* Assumimos que X tem mais que um elemento.

Definição 5. *Se X é um conjunto ordenado, e a é um elemento de X, então existem quatro tipos de subconjuntos de X chamados raios, determinados por a:*

- $(-\infty, a) = \{x : x < a\}$;
- $(a, +\infty) = \{x : a < x\}$;
- $[a, +\infty) = \{x : a \leq x\}$;
- $(-\infty, a] = \{x : x \leq a\}$.

Os dois primeiros tipos de conjunto são chamados raios abertos. Eles são abertos na topologia da ordem sobre X e formam uma sub-base para ela. Pois, se $a < b$, temos

- $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$;
- $[a_0, b) = (-\infty, b)$;
- $(a, b_0] = (a, +\infty)$.

1.3 Produto sobre o Cartesiano $X \times Y$

É possível através das topologias em X e em Y, definirmos uma topologia sobre o produto cartesiano $X \times Y$.

Sejam X e Y dois espaços topológicos, definimos a *Topologia produto* sobre $X \times Y$, sendo a topologia que tem como base uma coleção β, em que os conjuntos são da forma $U \times V$ tais que $U \subset \tau_X$ e $V \subset \tau_Y$. De fato β é uma base, pois

(I) se $X \in \tau_X$ e $Y \in \tau_Y$, então $X \times Y \in \beta$;

(II) e, seja $(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$ tais que $U_1, U_2 \in \tau_X$ e $V_1, V_2 \in \tau_Y$. Como $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, e $(U_1 \cap U_2) = U_3$, em que $U_3 \in \tau_Y$ e $(V_1 \cap V_2) = V_3$, em que $V_3 \in \tau_Y$. Logo, existe $U_3 \times V_3 \in \beta$ que contém (x, y) tal que $x \in U_1 \cap U_2$ e $y \in V_1 \cap V_2$. Então, $x \in U_3 = (U_1 \cap U_2) \in \tau_X$ e $y \in V_3 = (V_1 \cap V_2) \in \tau_Y$.

Exemplo 1.6. *Vamos considerar o cartesiano* $(\mathbb{R}, \tau_{usual}) \times (\mathbb{R}, \tau_{usual}) = \mathbb{R}^2$ *com topologia produto sobre esse cartesiano. Sejam* (b_1, c_1), (a_1, c_1), (b_2, c_2) *e* (a_2, c_2) *abertos em* $\mathbb{R}$, *representados na figura sobre o cartesiano* $\mathbb{R}^2$, *notemos que existem abertos que pode ser escrito como o cartesiano de outros dois abertos, por exemplo* $(b_1, c_1) \times (b_2, c_2)$. *Porém nem todo aberto em* $\mathbb{R}^2$ *necessariamente é cartesiano de abertos, como podemos ver na figura que* $U = (b_1, c_1) \times (a_2, c_2) \cup (a_1, c_1) \times (b_2, c_2)$ *é uma união de abertos.*

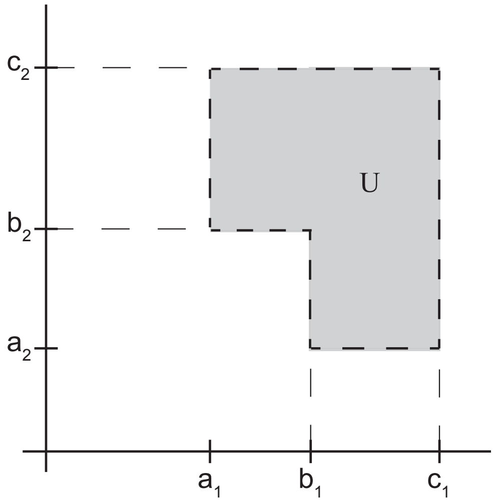

Figura 1.6: $U = (b_1, c_1) \times (a_2, c_2) \cup (a_1, c_1) \times (b_2, c_2)$

1.4 Subespaços Topológicos

Definição 6. *Seja* (X, τ_X) *um espaço topológico. Seja* Y *um subconjunto de* X, *dizemos que a coleção* $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau_X\}$ *é uma topologia sobre* Y. *Temos que o par* (Y, τ_Y) *é chamado de* subespaço topológico *de* (X, τ_X).

Provemos que τ_Y *é de fato uma topologia:*

(I) $Y \cap \emptyset = \emptyset$, *e* $\emptyset \subset \tau_X$;

(II) $\cup_{\alpha \in J}(U_\alpha \cap Y) = (\cup_{\alpha \in J} U_\alpha) \cap Y$;

(III) $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) \cap \ldots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n) \cap Y$.

Note que, se β é uma base para a topologia sobre X, então a coleção $\beta_Y = \{B \cap Y | B \in \beta\}$ é uma base para τ_Y.

Proposição 7. *Seja Y um subespaço de X. Se U é aberto em Y e Y é aberto em X, então U é aberto em X.*

Demonstração. Se U é aberto em Y, então U é da forma $U = V \cap Y$, para algum V aberto em X. Porém temos que Y é aberto em X, portanto U é interseção de abertos de X. Logo U é aberto ($U \in \tau_X$). $\square$

Definição 8 (Conjuntos Fechados)**.** *Um subconjunto A de um espaço topológico X, é dito fechado se e somente se seu complementar é aberto. Ou seja, $X \setminus A$ é aberto.*

Exemplo 1.7. *O conjunto $[a, b]$ é fechado em $\mathbb{R}$, pois $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ que é um aberto de X.*

Um conjunto pode ser aberto, fechado, aberto e fechado ou nenhum dos dois.

Exemplo 1.8. *Seja $Y = (0, 2) \cup (3, 5) \subset \mathbb{R}$, e seja (Y, τ_Y), com topologia de subespaço.*

- $(0, 2)$ *e aberto e fechado, pois $Y \setminus (0, 2)$ é aberto também.*
- $[1, 2) \cup (3, 5)$ *é fechado e não é aberto, pois $Y \setminus [1, 2) \cup (3, 5) = (0, 1)$*
- $(0, 1)$ *é aberto e não é fechado.*
- $[1, 2) \cup (3, 4)$ *não é nem aberto e nem fechado, pois o complementar $(0, 1) \cup [4, 5)$ também não é nem aberto e nem fechado.*

Com esse conceito e possível definir espaços topológicos utilizando a definição de fechados.

Seja X um espaço topológico, então temos que:

- $\emptyset$ e X são fechados.
- A interseção de quaisquer fechados é fechado.
- A união finita de fechados é fechado.

1.5 Fecho e Interior de um conjunto

Definição 9. *Dado um subconjunto B de um espaço X, temos:*

- *O interior de B é definido como sendo a união de todos os abertos contidos em B. Denotamos interior de B como sendo $IntB$ ou $\mathring{B}$.*
- *O fecho de B é definido como sendo a interseção de todos os fechados que contém B. Denotamos fecho de B por $\bar{B}$.*

Podemos dizer que o interior de um conjunto é o maior aberto contido nele, e o fecho é o menor fechado que o contém. Note que $\mathring{B}$ é aberto, que $\bar{B}$ é fechado e temos

$$\mathring{B} \subset B \subset \bar{B}.$$

Se B é aberto então $\mathring{B} = B$ e se B é fechado então $\bar{B} = B$.

Proposição 10. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. Suponha que a topologia é dada por uma base β, então $x \in \bar{A}$ se e somente se todo elemento básico que contém x intercepta A.*

Demonstração. Suponhamos que existe uma vizinhança básica U_x de x, $x \in U_x \in \beta$, tal que $U_x \cap A = \emptyset$. Logo $A \subset U_x^c$. Como U_x^c é fechado e $\bar{A}$ é o menor fechado que contém A, temos que $\bar{A} \subset U_x^c$. Mas $x \in \bar{A}$ então $x \in U_x^c$, o que contradiz que $x \in U_x$.

Assuma agora que todo elemento básico que contém x intercepta A. Suponha que exista um fechado $V \supset A$, $x \notin V$. Então, $x \in V^c$, onde V^c é aberto, e existe um aberto básico $V_x \in \beta$, com $V_x \cap A = \emptyset$. Como $V_x \cap A = \emptyset$ então $V^c \cap A = \emptyset$ o que contradiz o fato de $x \notin V$, pois $x \in V^c \cap A$, $x \in A \subset V$. □

Definição 11. *Dizemos se um aberto U que contém $x \in X$ é "vizinhança"de x. Logo, a definição de $\bar{A}$ pode ser da forma: $x \in \bar{A}$ se, e somente se, toda vizinhança de x intercepta A.*

Definição 12 (Pontos de acumulação)**.** *Dado um subconjunto A de um espaço topológico X, seja $x \in X$, dizemos que x é ponto de acumulação de A se toda vizinha de x intercepta o conjunto A em um ponto diferente de x. Denotamos como A' o conjunto de todos os pontos de acumulação de A.*

Teorema 13. *Sejam A um subconjunto de um espaço topológico X e, A' o conjunto de todos os pontos de acumulação de A. Então, vale que $\bar{A} = A \cup A'$.*

Demonstração. Se $x \in \bar{A}$, então $x \in A$ ou $x \notin A$. Para $x \in A$, $\bar{A} \subset A$. Portanto, $\bar{A} \subset A \cup A'$. Agora, se $x \notin A$, vamos mostrar que ele necessariamente está em A'.

Por hipótese , existe $U \in \tau_x$ tal que $x \in U$ e $U \cap A \neq \emptyset$, mas nós temos agora que $x \notin A$, logo $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. Então $x \in A'$ por definição de ponto de acumulação. □

Proposição 14. *Um subconjunto de um espaço topológico é dito fechado se, e somente se, ele contem todos os seus pontos de acumulação.*

Demonstração. Um conjunto A é fechado se, e somente se, $A = \bar{A}$. O teorema anterior mostra que $A' \subset A$, pois como $\bar{A} = A \cup A'$, então $A' \subset \bar{A} = A$. □

Definição 15 (Hausdorff)**.** *Seja X um espaço topológico. Definimos X como sendo um espaço de Hausdorff, se para todo x_1 e x_2 em X, existem respectivamente duas vizinhanças V_1 e V_2 disjuntas.*

Teorema 16. *Seja X um espaço de Hausdorff, todo conjunto com finitos pontos de X é fechado.*

Demonstração. Basta mostrar que todo conjunto unitário é fechado, pois usando a definição de espaço topológico sobre fechados, união finita de fechado é fechado.

Consideremos $\{x_0\} \subset X$. Como X é de Hausdorff, tomamos um $x \neq x_0$, existem duas vizinhanças disjuntas U_x e U_{x_0}. Como elas são disjuntas, $U_x \cap U_{x_0} \neq \emptyset$. Logo x não está no fecho de x_0, para todo $x \in X$, portanto o fecho de $\{x_0\}$ é o próprio conjunto. Então $\{x_0\}$ é fechado. □

Teorema 17. *Sejam X um espaço de Hausdorff e A um subconjunto de X. Então x é ponto de acumulação de A se e somente se para todo aberto que contém x, também contém infinitos pontos de A.*

Demonstração. Suponha que todo aberto que contém x, contém infinitos pontos de A, temos que ele intercepta A em pelo menos um ponto diferente de x. Então x é ponto de acumulação de A.

Reciprocamente, suponhamos que x é ponto de acumulação de A. Suponha também que toda vizinha U de x intercepta A em um número finito de pontos. Então, é verdade dizer que U_x intercepta $A \setminus \{x\}$ em finitos pontos também.

Seja $\{x_1, x_2 \dots x_n\} = U_x \cap A$. O conjunto $X \setminus \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ é um aberto de X, pois $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ é fechado (união de fechados unitários). Logo, temos que $U \cap (X \setminus \{x_1, x_2 \dots x_n\})$ é uma vizinhança de x que intercepta o conjunto $A \setminus \{x\}$ em um ponto diferente de x. O que contradiz o fato de ter finitos pontos na interseção. □

1.6 Funções Contínuas

Definição 18. *Dados dois espaços topológicos X e Y. Definimos como sendo uma função contínua, uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ se para todo aberto V de Y, a imagem inversa $f^{-1}(V)$ é aberta em X.*

Conforme os exemplos a seguir, notaremos que a continuidade não depende somente da aplicação, mas também dos espaços topológicos.

Por exemplo: Seja $f : X \longrightarrow Y$,com a topologia discreta em X e em Y. Podemos notar que nesse caso não importa qual f que seja, todo subconjunto é aberto em X logo, dado V um aberto em Y, sua imagem inversa $f^{-1}(V)$ é aberta em X. Portanto, f é contínua.

Agora, pense na função identidade na reta com a topologia usual, porém vamos tomar dois espaços diferentes. Seja $f : X \to Y$, em que X com topologia usual da reta e Y com topologia discreta.

Temos $f : (\mathbb{R}, \tau_{usual}) \to (\mathbb{R}, \tau_{discreta})$, com $f(x) = x$. Notemos que dado um conjunto unitário $\{a\}$ em Y, ele é aberto em Y, mas sua imagem inversa, $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$ não é um aberto em X.

Definição 19 (Homeomorfismo)**.** *Sejam X e Y espaços topológicos, seja $f : X \longrightarrow Y$ bijetora. Se f e a sua inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ forem contínuas, então f é chamada de homeomorfismo.*

É fácil ver que a condição de f^{-1} ser contínua, é ver que para cada aberto U em X a imagem inversa de U da aplicação f^{-1} é a mesma que a imagem de U da aplicação da própria f.

Existem diferentes modos de se construir uma função contínua dado dois espaços topológicos. Vejamos alguns.

Exemplo 1.9. *Sejam X e Y espaços topológicos , se a aplicação $f : X \longrightarrow Y$ "leva" todos elementos de X em um $y_0 \in Y$, então f é contínua.*

Demonstração. Seja $f(x) = y_0$, apr todo $x \in X$. Se V é um aberto de Y temos: se $y_0 \in V$, então $f^{-1}(V) = X$. Se $y_0 \notin V$, então $f^{-1}(V) = \emptyset$. Como ambos são abertos em X, então f é contínua. □

Exemplo 1.10. *Seja A um subespaço de X, então a função chamada de inclusão $f : A \longrightarrow X$ é contínua.*

Demonstração. Dado um aberto V em X, temos que $f^{-1}(V) = V \cap A$, onde $V \cap A$ é aberto em A por definição de subespaço. □

Exemplo 1.11. *A aplicação $f : X \to Y$ é dita contínua se para todo $x \in X$ e toda vizinhança V de $f(x)$ existir uma vizinhança U_x de x tal que $f(U_x) \subset V$.*

Demonstração. Seja V um aberto de Y, com $f(x) \in V$. Então temos que $x \in f^{-1}(V)$, logo existe uma vizinhança U_x tal que $f(U_x) \subset V$. Com isso temos que $f^{-1}(V)$ pode ser escrito como união de abertos, então $f^{-1}(V)$ é aberto, e f é contínua. □

Lema 20 (Lema da Colagem)**.** *Sejam $X = A \cup B$, em que A e B são fechados em X, e $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$, para $x \in (A \cap B)$, então f e g combinam uma função $h(x)$ contínua $h : X \to Y$ definida por: $h(x) = \begin{cases} f(x), & se\ x \in A \\ g(x), & se\ x \in B \end{cases}$.*

Demonstração. Seja V um subconjunto fechado de Y, temos que

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V),$$

por teoria dos conjuntos. Agora por hipótese f é contínua, então $f^{-1}(V)$ é fechado em A, logo fechado em X. Do mesmo modo $g^{-1}(V)$ é fechado em X, logo a união $h^{-1}(V)$ também é fechado. □

1.7 Topologia Quociente

Definição 21. *Sejam X e Y espaços topológicos e seja $g : X \to Y$ uma aplicação sobrejetora. Essa aplicação g é chamada de aplicação quociente quando um subconjunto $U \in Y$ é aberto em Y se, e somente se, $g^{-1}(U)$ é aberto em X.*

Existem duas aplicações especiais dentre as quocientes, que são chamadas de:

Aplicações Abertas: Seja $f : X \longrightarrow Y$, f é uma aplicação aberta se para todo $U \in \tau_x$, $f(U) \in \tau_y$. Ou seja, imagem de um aberto é aberta.

Aplicações Fechadas. $f : X \longrightarrow Y$, f é uma aplicação fechada se para todo U fechado em X, $f(U)$é fechado em Y. Ou seja, imagem de um fechado for fechado.

Proposição 22. *Seja X um espaço topológico, e seja A um conjunto, onde $p : X \longrightarrow A$ é sobrejetora. Então existe somente uma topologia τ_a relativa a aplicação p que a torna uma aplicação quociente. Esta topologia quociente é chamada de topologia induzida por p.*

A coleção é definida de modo que os subconjuntos $U \subset A$ tenham imagem inversa $p^{-1}(U) \subset \tau_x$. Essa coleção é uma topologia em A.

Demonstração.

- $\emptyset$ e A são abertos, pois $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $p^{-1}(A) = X$, pois p é sobrejetora.
- $p^{-1}(\cup_{\alpha \in K} U_\alpha) = \cup_{\alpha \in K} p^{-1}(U_\alpha)$. União qualquer de abertos. (Utilizando teoria dos conjuntos)
- $p^{-1}(\cap_{i=1}^{n} U_i) = \cap_{i=1}^{n} p^{-1}(U_i)$. Interseções finitas de abertos. (Utilizando teoria dos conjuntos)

□

Exemplo 1.12 (Topologia Quociente). *Seja g uma aplicação de $\mathbb{R}$ em um conjunto A de três elementos, $A = \{a, b, c\}$, definida por* $g(x) = \begin{cases} a & , \text{ se } x > 0 \\ b & , \text{ se } x < 0 \\ c & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$

Logo, a topologia em A induzida por g possui como abertos os seguintes conjuntos

$$\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{a, b\},$$

pois temos que

- $g^{-1}(A) = \mathbb{R}$ *aberto em* $\mathbb{R}$.
- $g^{-1}(a) = (0, +\infty)$ *aberto em* $\mathbb{R}$.
- $g^{-1}(b) = (-\infty, 0)$ *aberto em* $\mathbb{R}$.
- $g^{-1}(a, b) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *aberto em* $\mathbb{R}$.

Definição 23. *Seja X um espaço topológico e seja X^* uma partição de X, onde X^* é formado por conjuntos disjuntos cuja união é todo X.*

Seja p, uma aplicação sobrejetora, $p : X \longrightarrow X^*$ onde p leva todos os elementos x de X nos elementos U_x de X^* que os contém. Considerando sobre X^* a topologia quociente induzida por p, o par (X^*, τ^*) é chamado de espaço quociente.

Exemplo 1.13. *Seja X o retângulo $[0, 1] \times [0, 1]$. Definimos uma partição X^* de X da seguinte forma: são todos os conjuntos (x, y), em que $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$. Podemos ver como conjuntos do tipo:*

- $\{x \times 0, x \times 1\}$ *onde* $0 < x < 1$.
- $\{0 \times y, 1 \times y\}$ *onde* $0 < y < 1$.
- *e também o conjunto:* $\{0 \times 0, 0 \times 1, 1 \times 0, 1 \times 1\}$

Os abertos mais comuns em X da forma $p^{-1}(U)$ estão representados na figura 1.7, cada figura representa um aberto de X que é igual a união das classes de equivalência.

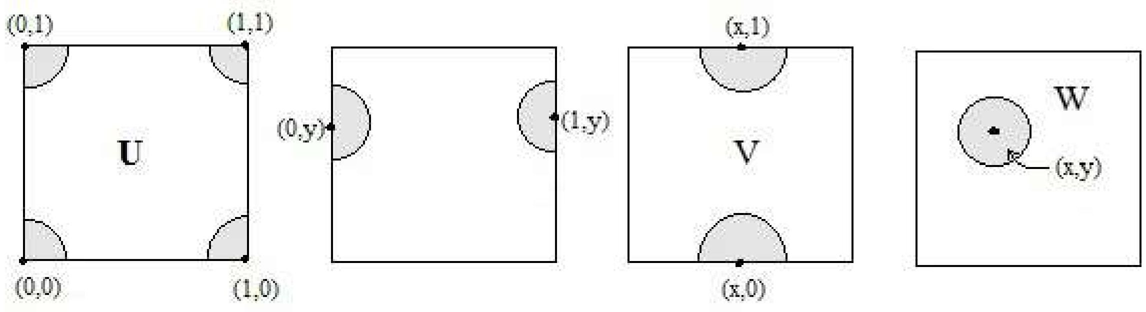

Figura 1.7: Abertos de X

A imagem de cada um desses conjuntos pela aplicação p é um aberto de X^*, como indicado na figura 1.8. A descrição de X^* é um modo diferente de dizer o que expressamos nas figuras, quando "colamos"os vértices de um retângulo, formando um toro.

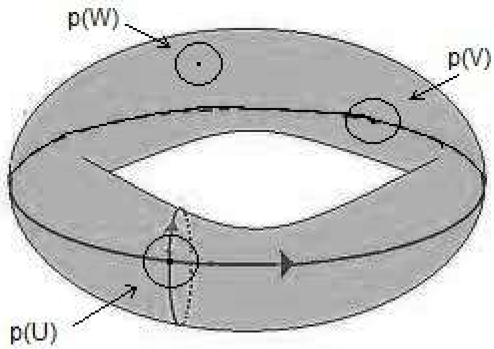

Figura 1.8: Ideia de como seriam a imagem dos abertos de X

Referências Bibliográficas

[1] Munkres, J. R., *Topology: a first course*, Prentice Hall Inc., 1975.

[2] Massey, W. S., *Algebraic topology: an introduction*, Springer-verlag, 1991.

[3] Lima, E. L., *Elementos de topologia geral*, SBM, 2009.